

TRANSFERT DE MASSE DANS DES JETS TURBULENTS DE REVOLUTION EN MILIEU NON HOMOGENE

P. CHASSAING et A. CLARIA

Institut de Mécanique des Fluides, Laboratoire Associé au C.N.R.S.,
31071 Toulouse Cedex, France

(Reçu le 8 Octobre 1974 et modifié le 27 Mars 1975)

Résumé—La note concerne l'écoulement turbulent incompressible de type jet à section initiale circulaire, émis dans une atmosphère au repos et de nature physique différente de celle de l'effluent. Dans les expériences rapportées, un jet de gaz carbonique pur débouche dans une atmosphère d'air de même température.

L'intérêt est focalisé sur les caractéristiques liées au transfert de masse (profils de vitesse, de concentration, taux d'expansion, lois de décroissance sur l'axe) dont on compare les évolutions à celles afférentes à un jet d'air s'épanouissant dans des conditions semblables.

L'approche théorique développée hors du cadre de l'hypothèse classique de traceur permet alors de justifier les analogies ou similitudes précédemment relevées.

NOMENCLATURE

- x_j , ($j = 1 \text{ à } 3$), coordonnées eulériennes dans un repère fixe orthonormé;
 t , variable de temps;
 U_i , ($i = 1 \text{ à } 3$), composantes de la vitesse dans un repère fixe orthonormé;
 U, V , composantes de la vitesse dans un repère cylindrique;
 P , pression;
 C , concentration (fraction volumique du constituant 2);
 \mathcal{D} , diffusivité massique;
 Re , nombre de Reynolds;
 Fr , nombre de Froude;
 r , distance radiale;
 D , diamètre;
 Q , débit volumique.

Caractères grecs

- ρ , masse volumique;
 μ , viscosité dynamique;
 ν_T , viscosité cinématique turbulente;
 σ , nombre de Schmidt turbulent;
 δ , échelle de longueur caractéristique de l'expansion du jet;
 ξ , coordonnée axiale adimensionnelle
 $\left(\xi = \frac{x + x^*}{r_0} \right) x^*$ abscisse du pôle du jet;
 η , variable d'affinité.

Indices

- 0, réfère à la section de sortie du jet;
1, constituant 1 (air);
2, constituant 2 (CO₂);
max, valeur (maximum) sur l'axe du jet.

Convention

- $\bar{\quad}$, valeur moyenne;
 \prime , valeur fluctuante.

I. INTRODUCTION

DANS LE cadre des études sur la turbulence libre du fluide Newtonien incompressible, l'écoulement de type jet a fait l'objet depuis longtemps déjà de nombreuses recherches tant du point de vue théorique qu'expérimental. Ne considérant ici que le seul cas du jet bidimensionnel de révolution, depuis l'un des plus anciens documents publié par Trupel [1] en 1915, de nombreux ouvrages ont fourni des synthèses des principaux travaux sur ce sujet [2-4]. C'est dire que les caractéristiques principales de ce cas d'écoulement sont bien connues tant en ce qui concerne les paramètres moyens que les paramètres turbulents, ces derniers ayant vu leur comportement précisé dans des publications dont certaines sont relativement récentes [5-11].

Pour leur très large majorité, les auteurs précédemment mentionnés ont considéré que le jet et son atmosphère réceptrice—au repos ou non—étaient constitués d'un seul et même fluide. Le cas contraire où le jet est émis dans une atmosphère de nature physique différente bien que de même phase n'a été comparativement que très peu étudié, seules trois références, dont la plus récente date de vingt ans ayant pu être relevées par les auteurs dans la littérature [12-14]. Encore convient-il de préciser que ces travaux ne procèdent pas tous des mêmes hypothèses, certains admettant une configuration d'écoulement telle que l'un des fluides soit, en tout point, en proportion très faible, justifiant ainsi des simplifications résultant de ce que nous désignerons par "hypothèse de traceur" et que nous préciserons ultérieurement.

Compte tenu de cette revue bibliographique, le but du présent article est de comparer, du point de vue des paramètres moyens caractérisant le transfert de masse, les propriétés de deux jets de révolution, turbulents incompressibles s'épanouissant à température constante dans une atmosphère d'air, infinie et au repos lorsque l'un d'eux est constitué d'air, l'autre de gaz carbonique pur. Ainsi, après avoir dégagé, sur le plan

théorique, les analogies et différences existant entre ces deux configurations d'écoulement—Section 2—nous en discuterons la validité aux vues des résultats expérimentaux—Section 4—après avoir présenté dans la Section 3 les traits principaux des dispositifs et méthodes de mesure.

2. CONSIDERATIONS THEORIQUES

Tel qu'il a été précédemment défini, le problème se ramène, d'un point de vue général théorique à la formulation et résolution des équations régissant les six fonctions réelles des variables d'Euler (x_j, t) que sont vitesse $U_i(x_j, t)$, pression $P(x_j, t)$, masse volumique $\rho(x_j, t)$ et concentration $C(x_j, t)$.

2.1 Formulation des équations

Une hypothèse fréquemment invoquée lors de la formulation des équations est celle dite "du traceur", selon laquelle l'un des constituants—indice 2 par exemple—n'est présent qu'à très faible concentration. De ce fait, la masse volumique du fluide est en tout point confondue avec celle du constituant 1 et constante du fait de l'hypothèse d'incompressibilité. Il en résulte une déconnexion totale des équations régissant le champ de vitesse et le champ de concentration qui ainsi sont résolues successivement. Une telle hypothèse n'est pas admissible ici, la concentration initiale en CO₂ étant de 100 pour cent.

On peut alors dans ce cas, songer à utiliser une approche théorique globale reposant sur les théorèmes généraux de conservation de masse et de quantité de mouvement. Ce point de vue, adopté notamment par Abraham [15] n'est pas suivi ici où l'on s'intéresse aux profils des différentes quantités donc à des grandeurs locales.

Les équations du mélange turbulent de deux constituants monophasiques doivent donc être déduites des équations générales de la Mécanique des Fluides dans le cadre des hypothèses générales suivantes:

- H1: Evolution isotherme
- H2: Absence de réactions chimiques au cours du mouvement
- H3: Domaine de vitesse tel que chaque constituant puisse être considéré comme incompressible ($\rho_1 = \text{cte}$ et $\rho_2 = \text{cte}$)
- H4: Chaque constituant obéit aux lois de Newton et de Fick pour le transfert moléculaire de quantité de mouvement et de masse. Il en est de même du mélange à toute concentration, les coefficients des lois gradients (viscosité et diffusivité massique) devenant dans ce cas des grandeurs locales puisque fonction de la concentration.

Les équations prennent alors la forme suivante:

$$\rho = (1 - C)\rho_1 + C\rho_2 \tag{1}$$

ou

$$C = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0 \tag{3}$$

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(C U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \mathcal{D} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \tag{5}$$

Admettant que ces équations régissent, à chaque instant le mouvement turbulent, les équations du mouvement moyen s'en déduisent par une procédure classique consistant à décomposer les valeurs instantanées sous la forme:

$$\begin{aligned} U_i &= \bar{U}_i + u'_i \\ P &= \bar{P} + p' \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho' \end{aligned}$$

et nécessairement, compte tenu de (2) $C = \bar{C} + c'$ avec

$$\bar{C} = \frac{\bar{\rho} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{et} \quad c' = \frac{\rho'}{\rho_2 - \rho_1} \tag{6}$$

Par passage à la moyenne dans les équations (3)–(5) on obtient, en négligeant les corrélations d'ordre supérieur ou égal à trois:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \cdot \bar{U}_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u'_i}) \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{C} \cdot \bar{U}_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{c' u'_i}) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{U}_i \bar{U}_j) &= \bar{F}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u'_i u'_j}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{U}_i \cdot \overline{\rho' u'_j} + \bar{U}_j \cdot \overline{\rho' u'_i}). \end{aligned} \tag{9}$$

La validité des équations (7) à (9) sous-entend que les hypothèses (h) suivantes soient vérifiées:

- h1: Forte intensité turbulente assurant que les termes diffusifs liés au mouvement d'agitation macroscopique sont prépondérants vis à vis de ceux relatifs aux fluctuations moléculaires.
- h2: Mouvement moyen stationnaire dans le temps.

Notons que l'existence d'une relation linéaire $C(\rho)$ implique, d'après (7) et (8) que:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0. \tag{10}$$

Dans ces conditions, les équations s'écrivent finalement en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique et de type couche limite:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} = 0 \tag{11}$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \bar{v}') \tag{12}$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}}{\partial r} = \bar{F}_x - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \cdot \overline{u' v'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{U} \cdot \overline{\rho' v'}) \tag{13}$$

avec (6): $\bar{c} = \frac{\bar{\rho} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ et $c' = \frac{\rho'}{\rho_2 - \rho_1}$.

2.2 Résolution

Il existe plusieurs possibilités de résolution des équations (11)–(13). L'une d'elle consisterait à adapter la méthode numérique mise au point par les chercheurs de l'Imperial College de Londres [17, 19] au cas d'un écoulement à masse volumique variable. La réservant à des développements ultérieurs, nous avons simplement, dans cette première étude, cherché à dégager analytiquement, certaines propriétés directement confrontables avec les résultats expérimentaux. Pour ce faire, nous avons étudié la solution en l'absence de gradient de pression, en négligeant les forces volumiques extérieures sous la forme particulière de profils présentant une affinité géométrique. Cette dernière hypothèse que l'on sait n'être vérifiée expérimentalement dans le cas du jet homogène, qu'à partir d'une certaine distance de la section de sortie se traduit par les relations suivantes :

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{\max}} = f(\eta) \tag{14}$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{U}_{\max}} = g(\eta) \tag{15}$$

$$\frac{\bar{u}\bar{v}'}{\bar{U}_{\max}^2} = h(\eta) \tag{16}$$

où η est la variable adimensionnelle d'affinité des caractéristiques dynamiques définie par :

$$\eta = \frac{r}{\delta(\xi)} \tag{17}$$

$\delta(\xi)$ désignant une épaisseur caractéristique du jet déduite soit du profil de vitesse— $\delta_1(\xi_1)$ —soit du profil de concentration— $\delta_2(\xi_2)$ — nous poserons :

$$\frac{\delta(\xi)}{r_0} = \frac{1}{\phi(\xi)} \tag{18}$$

et compléterons la formulation de l'hypothèse d'affinité en posant :

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\max}} = l(\eta) \tag{19}$$

$$\frac{\bar{\rho}\bar{v}'}{\bar{\rho}_{\max}\bar{U}_{\max}} = k(\eta) \tag{20}$$

Quant aux lois de décroissance dans l'axe, nous les exprimerons par :

$$\frac{\bar{U}_{\max}}{\bar{U}_0} = \psi(\xi) \tag{21}$$

$$\frac{\bar{\rho}_{\max}}{\rho_0} = \lambda(\xi). \tag{22}$$

Négligeant l'action des forces de pesanteur et de pression dans l'équation (13), la substitution des relations (14) à (22) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \psi^2 \lambda [\eta f'(\eta)] + \psi (\dot{\psi} \lambda) [f^2 \eta] + \phi \psi^2 \lambda [g'(\eta)] \\ = - \phi \psi^2 \lambda \left[\frac{(\eta \dot{h}) - (\eta k f)}{\eta} \right] \end{aligned} \tag{23}$$

le symbole ($\dot{}$) signifiant une dérivation totale par rapport à la seule variable dont dépend le groupement entre parenthèses. Les groupements entre crochets de l'équation (23) n'étant fonctions que de la variable η , la compatibilité de cette relation avec l'hypothèse d'affinité impose que :

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} \psi \lambda = \alpha_1 (\dot{\psi} \lambda) \tag{24}$$

$$\phi \dot{\psi} \lambda = \beta_1 (\dot{\psi} \lambda) \tag{25}$$

α_1 et β_1 désignant deux constantes.

Il résulte alors de (24) et (25) que : $\dot{\phi}/\phi_2 = \alpha_1/\beta_1 = cte$, soit :

$$\phi = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\xi_1} \tag{26}$$

L'introduction des mêmes relations (14) à (22) dans l'équation (12) conduit à :

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} \psi \lambda [\eta f'] + \psi \dot{\lambda} [f \cdot \eta] + \phi \dot{\psi} \lambda [g'] = - \phi \psi \lambda \left[\frac{(\eta k)}{\eta} \right] \tag{27}$$

Les conditions de compatibilité s'écrivent alors :

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} \lambda = \alpha_2 \dot{\lambda} \tag{28}$$

$$\phi \dot{\lambda} = \beta_2 \dot{\lambda} \tag{29}$$

où α_2 et β_2 sont deux nouvelles constantes telles que $\alpha_2/\beta_2 = \alpha_1/\beta_1$ puisque, comme précédemment, les relations (28) et (29) conduisent à $\dot{\phi}/\phi^2 = \alpha_2/\beta_2$.

La résolution du système d'équations différentielles (24) à (29) peut alors être aisément accomplie par voie analytique de sorte à obtenir :

$$\lambda = \frac{A}{\xi^n} \tag{30}$$

et :

$$\psi = \frac{B}{\xi^{\frac{1}{\alpha_1} - n}} \tag{31}$$

où A , B et n sont trois constantes; n étant liée à α_1 , β_1 et β_2 par :

$$n = \frac{\beta_1}{\alpha_1 \beta_2} = \frac{1}{\alpha_2} \tag{32}$$

Introduisant alors, grâce à l'équation de continuité (11) la fonction de courant adimensionnelle $F(\eta)$ telle que :

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta} \dot{F}(\eta) \tag{33}$$

$$g(\eta) = \dot{F}(\eta) - \frac{1}{\eta} F(\eta) \tag{34}$$

la substitution des lois (26), (30) et (31) conduit, dans l'équation (23) à :

$$\begin{aligned} \frac{l}{\eta} \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\eta} F \frac{d}{d\eta} \left(l \frac{dF}{d\eta} \right) - \frac{\alpha_1}{\eta^2} l F \frac{dF}{d\eta} \\ = \alpha_1 \frac{d}{d\eta} \left(\eta l h + k \frac{dF}{d\eta} \right) \end{aligned} \tag{35}$$

à condition d'imposer $\alpha_1 + \beta_1 = 0$

et dans l'équation (27) à :

$$nl \frac{dF}{d\eta} + F \frac{dl}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (\eta k). \quad (36)$$

Arrivés à ce stade de l'exposé, nous concluons ce paragraphe par les remarques suivantes :

(1) Compte tenu d'hypothèses de fermetures convenables sur les corrélations doubles—fonctions h et k —la résolution du système formé des équations interdépendantes (35) et (36) n'est pas possible par voie analytique dans le cas général.

(2) Les équations (30) à (36) comprennent comme cas particulier celui du jet homogène. En effet, pour $n = 0$ et $\alpha_1 = 1$, on obtient ($k = 0$):

d'après (36) $l = \text{cte}$, et d'après (30) $\lambda = \text{cte}$, ce qui correspond bien à $\rho = \text{cte}$

d'après (31) $\psi = B/\xi$, ce qui redonne la loi de décroissance hyperbolique de la vitesse sur l'axe

d'après (26) $\phi = 1/\xi$, qui correspond à la loi d'expansion linéaire du jet.

Enfin, l'équation (35) prend la forme bien connue—voir par exemple [3]:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\frac{F}{\eta} \frac{dF}{d\eta} \right] = \frac{d}{d\eta} [\eta h]. \quad (37)$$

(3) L'hypothèse de conservation de la quantité de mouvement $\lambda(\psi^2/\phi^2) = \text{cte}$ qui ne peut ici n'être que partiellement satisfaite, conduirait à une relation supplémentaire entre les deux constantes indépendantes α_1 et n qui s'écrit :

$$(2+n)\alpha_1 = 2. \quad (38)$$

(4) La loi de décroissance hyperbolique de la concentration maximale, liée à l'hypothèse de traceur, correspond à $n = 1$ et réduit l'équation (36) à la forme classique—voir également [3]:

$$\frac{d}{d\eta} (Fl) = \frac{d}{d\eta} (\eta k). \quad (39)$$

(5) Enfin, dans le cas classique des équations (37) et (39), la recherche du champ de vitesse est dissociée de celle du champ de concentration et n'exige que deux hypothèses de fermeture sur les fonctions h et k .

Dans la plupart des cas, celles-ci sont de type gradient, la prise en compte du transport convectif lié aux grosses structures n'intervenant que dans des configurations d'écoulements particulières telles les jets dissymétriques [20].

Posant ainsi :

$$\overline{u'v'} = -v_T \frac{\partial \overline{U}}{\partial r} \quad (40)$$

et

$$\overline{c'v'} = -\sigma v_T \frac{\partial \overline{C}}{\partial r} \quad (41)$$

où v_T est la viscosité turbulente et σ un nombre de Schmidt turbulent, l'équation (37) s'écrit :

$$\text{soit : } FF' = \frac{\Delta^2}{D_0^2} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)^2 \quad (42)$$

qui est l'équation de Tollmien [21], obtenue en accord avec l'hypothèse de Prandtl :

$$v_T = -l_m^2 \frac{\partial \overline{U}}{\partial r}$$

où $l_m = \Delta \xi$, Δ constante, et dont la solution est tabulée. Soit :

$$FF' = K(F' - \eta F'') \quad (43)$$

qui est l'équation de Schlichting [22] où

$$v_T = KU_0 \cdot D_0 \cdot \psi/\phi - K$$

et ψ/ϕ étant deux constantes et dont la solution conduit au profil de vitesse :

$$f(\eta) = \left(1 + \frac{\psi/\phi U_0 r_0}{8v_T} \eta^2 \right)^{-2} \quad (44)$$

quant à l'équation (39) elle devient :

$$\frac{f'}{f} = \frac{v_T}{U_0 D_0 \psi/\phi} \frac{l'}{l}$$

qui, sous réserve de l'hypothèse de Prandtl-Reichardt $v_T = \text{cte}$, conduit dans le cas d'un nombre de Schmidt turbulent constant à la relation bien connue entre profil de vitesse et de concentration :

$$l = f^{1/\sigma} \text{ soit } \frac{\overline{C}}{\overline{C}_{\max}} = \left(\frac{\overline{U}}{\overline{U}_{\max}} \right)^{1/\sigma} \quad (45)$$

3. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Bien que, comme nous l'avons souligné en introduction, les recherches sur le jet homogène aient été fort nombreuses, nous avons néanmoins procédé à nos propres expériences sur une configuration relativement peu étudiée d'un jet de tube. Ainsi devenait possible la comparaison avec le jet de CO_2 dans un cadre unitaire de travaux, et l'affranchissement de l'incertitude dans le choix des constantes empiriques dont les valeurs sont étroitement liées aux caractéristiques mêmes du dispositif expérimental.

Les paramètres principaux des essais sont indiqués dans le Tableau 1, aussi nous limiterons nous ici à donner les précisions suivantes :

(a) Dans les deux cas, le milieu extérieur est au repos à l'infini, les jets étant émis de tubes à section circulaire de longueurs respectives $L_1/D_0 = 60$ et $L_2/D_0 = 26$, le profil de vitesse mesuré dans la section de sortie correspondant bien, pour le premier essai, à celui de l'écoulement turbulent de conduite pleinement développé. Il en résulte des conditions initiales de turbulence très différentes de celles usuellement admises pour des jets issus de buses à fort coefficient de contraction. On peut donc s'attendre à des différences de développement dans la zone initiale du jet sans répercussion sur les lois afférentes à la plage d'affinité.

(b) Dans les deux cas, l'émission du jet se faisait suivant une verticale ascendante. La possibilité de négliger les forces de gravité vis à vis des forces d'inertie a limité à 15 diamètres l'exploration en aval du jet de CO_2 dont le nombre de Froude initial :

$$\overline{U}_0 / \sqrt{\left[\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right)_0 g D_0 \right]} \text{ est de } 12.$$

Tableau 1. Tableau des caractéristiques des essais

Principales caractéristiques	Numéro de l'essai	
	1	2
Nature du milieu extérieur	Air atmosphérique	Air atmosphérique
Nature du jet	Air	CO ₂
Diamètre initial D_0	4 cm	4 cm
Masse volumique initiale	1,19 kg/m ³	1,77 kg/m ³
Débit volumique initial	20,10 l/s	6,77 l/s
Vitesse moyenne U_0	16 m/s	5,4 m/s
Nombre de Reynolds Re_0	41 500	26 500
Nombre de Froude Fr_0	∞	12
Distance aval explorée	$0 < x/D_0 < 20$	$0 < x/D_0 < 15$

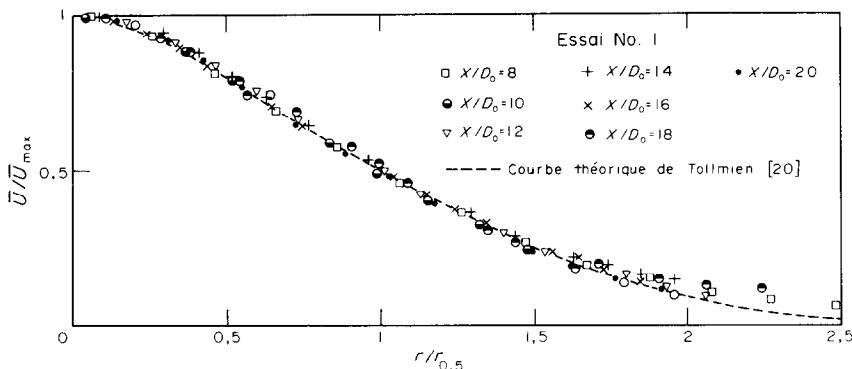


FIG. 1. Profils de vitesse adimensionnels dans le jet d'air.

(c) Les mesures de vitesse (essai No. 1) ont été effectuées à l'aide de l'anémomètre à fil chaud opérant à température constante et linéarisé afin d'éviter les distorsions dues aux fortes intensités turbulentes présentes dans le jet. Le coefficient de surchauffe appliqué au fil équipant une sonde classique DISA 55A 25 était de 0,8, et des corrections liées aux fluctuations de vitesses ont été introduites, celles dues aux propriétés directionnelles des sondes n'étant pas prises en compte.

(d) Les mesures de concentration (essai No. 2) ont été réalisées à l'aide d'un analyseur à infra-rouge type ONERA, fonctionnant par prélèvement continu différentiel. Le diamètre extérieur de la sonde était de 2 mm et son axe parallèle à celui du jet. La vitesse d'aspiration a été maintenue constante dans tout le domaine d'exploration.

4. DISCUSSION DES RESULTATS

4.1 Profils de vitesse

Sur la Fig. 1, nous avons tracé directement les profils adimensionnels $\bar{U}/\bar{U}_{\max} = f(r/r_{0,5})$. La coordonnée radiale de référence $r_{0,5}$ correspond au point où $\bar{U} = \frac{1}{2}\bar{U}_{\max}$. L'affinité des profils apparaît clairement pour $x/D_0 \geq 8$, résultat en accord avec les conclusions de Hinze [12]. La comparaison avec la courbe théorique de Tollmien révèle un bon accord d'ensemble avec cependant une courbure plus forte à l'origine—constatation commune à l'ensemble des théories—et un léger décalage à la frontière externe pouvant résulter soit de la condition de raccordement à distance finie de la théorie de Tollmien, soit d'une imprécision des résultats expérimentaux liée notamment au fort niveau d'intermittence présent dans cette zone.

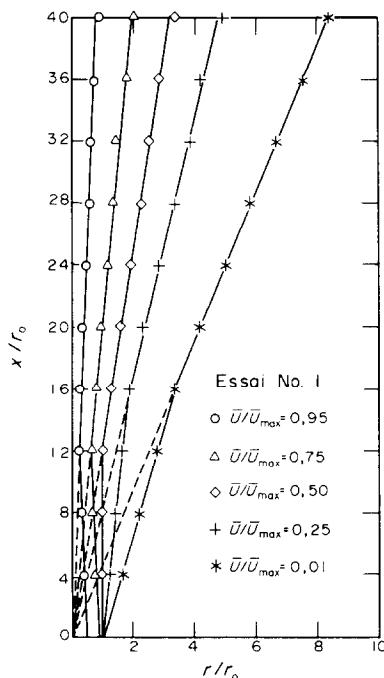


FIG. 2. Droites d'expansion du jet d'air.

4.2 Expansion du jet d'air

Pour caractériser l'expansion du jet, nous avons tracé, les lieux des points d'un demi plan méridien où le rapport \bar{U}/\bar{U}_{\max} prend les valeurs constantes 0,95, 0,75, 0,50, 0,25, 0,01. La Fig. 2 montre alors qu'à partir de la section $x/D_0 = 8$, ces lieux sont bien des droites conformément à la théorie. En outre, pour cet essai,

Tableau 2. Tableau comparatif de quelques caractéristiques dynamiques d'un jet turbulent cylindrique

Origine des résultats	Caractéristiques du jet	Vitesse			
		initiale \bar{U}_0 (m/s)	a	K	x^*
[1] Trüpel (1915)			0,080	14,5	4,4
[22] Zim (1921)	Jet de buse $(Re)_0 = 8,8 \cdot 10^4$	9	0,085 à 0,098	11,6 à 13,7	4,15 à 13,6
[24] Prandtl (1923)			0,077	15,3	4,6
[21] Tollmien (1926)	Jet de buse $(Re)_0 = 46 \cdot 10^4$	47	0,077		
[25] Syrkin et Liakovski (1936)			0,093	12,6	3,80
[26] Reichardt (1941)	Jet de mur $(Re)_0 = 5,35 \cdot 10^4$	50	0,085		
[12] Hinze et Van der Hegge Zijnen (1949)	Jet de mur $(Re)_0 = 6,7 \cdot 10^4$	40	0,080	12,8	
[27] Florent (1966)	Jet de buse et de mur; $15,8 \cdot 10^4$ à $32,8 \cdot 10^4$	20 à 50	0,085 à 0,092		
Travaux actuels	Jet de tube $(Re)_0 = 4,2 \cdot 10^4$	16	0,080	12,1	0

a : pente de l'équation de la droite de "vitesse moitié": $r_{0,5} = a(x + x^*)$.

x^* : abscisse de l'origine fictive.

K : coefficient de l'équation de décroissance hyperbolique de la vitesse sur l'axe:

$$\frac{\bar{U}_{max}}{U_0} = K \frac{r_0}{x + x^*}$$

ces droites passent sensiblement par l'origine géométrique—abscisse de l'origine fictive ou pole x_1^* nulle—les pentes de celles afférentes aux valeurs 0,75, 0,50 et 0,25 étant respectivement de 0,049, 0,080 et 0,120. Le tableau comparatif (2) fait apparaître que la valeur de 0,08 s'inscrit convenablement dans l'ensemble des résultats antérieurs qu'il mentionne.

4.3 *Décroissance de la vitesse sur l'axe et entraînement*

Sur la Fig. 3 apparaît la loi de décroissance de la vitesse sur l'axe sous la forme adimensionnelle définie par (14). La courbe hyperbolique théorique, calée avec le coefficient 12,1 constitue une bonne représentation du résultat expérimental tout en s'inscrivant bien dans l'ensemble des valeurs déjà publiées—voir Tableau 2.

Du point de vue du transfert de masse lié à l'entraînement par le jet du fluide extérieur, un résultat intéressant est celui de l'évolution du débit en fonction de la distance longitudinale.

Posant:

$$Q(x) = \int_0^\delta \bar{u}(r, x) \cdot 2\pi r dr$$

δ désignant une épaisseur caractéristique de l'expansion du jet, il est clair que, dans la zone où existe l'affinité des profils ($x/D_0 \geq 8$) on doit avoir:

$$Q(x) = 2\pi\delta^2 \bar{U}_{max} \int_0^1 \eta f(\eta) d\eta.$$

Soit, compte tenu des lois d'évolution $\delta(x)$ et $\bar{U}_{max}(x)$

$$Q(x) = K \cdot x \tag{46}$$

où K est une constante.

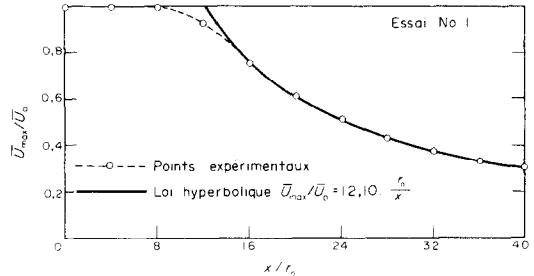


FIG. 3. Evolution longitudinale de la vitesse sur l'axe.

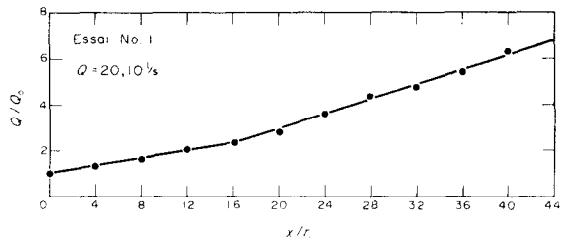


FIG. 4. Variation longitudinale du débit du jet.

La courbe de la Fig. 4 confirme effectivement cette variation linéaire pour $x/D_0 \geq 10$, l'épaisseur caractéristique δ n'étant autre que $r_{0,01}$, distance radiale des points où $\bar{U}/\bar{U}_{max} = 1$ pour cent—cf. Fig. 2.

Le taux d'entraînement sur une distance égale à une fois le rayon initial r_0 est de 3,6 l/s dans la zone d'affinité alors qu'il n'est que de 1,6 l/s dans la zone initiale où l'évolution peut également être considérée comme linéaire.

4.4 Profils de concentration

Différents profils de concentration en CO₂ relatifs à l'essai No. 2 sont donnés sur la Fig. 5 pour des sections du jet comprises entre $x/D = 1$ et $x/D = 15$. Désignant par $R_{0,5}$ la valeur de la distance radiale où $\bar{C} = \frac{1}{2}\bar{C}_{max}$, nous en avons déduit, Fig. 6, la représentation adimensionnelle $\bar{C}/\bar{C}_{max} = f(r/R_{0,5})$ faisant ainsi

apparaître une affinité entre les courbes relatives aux sections $x/D_0 = 6$ à 15. La comparaison avec le profil de vitesse universel de la Fig. 1 est présentée sur la Fig. 7. Elle révèle que les effets de densité n'affectent pas de façon radicale la forme générale des profils, remarque qui concorde avec celle de Hinze [3] concernant les profils de température dans un jet chaud.

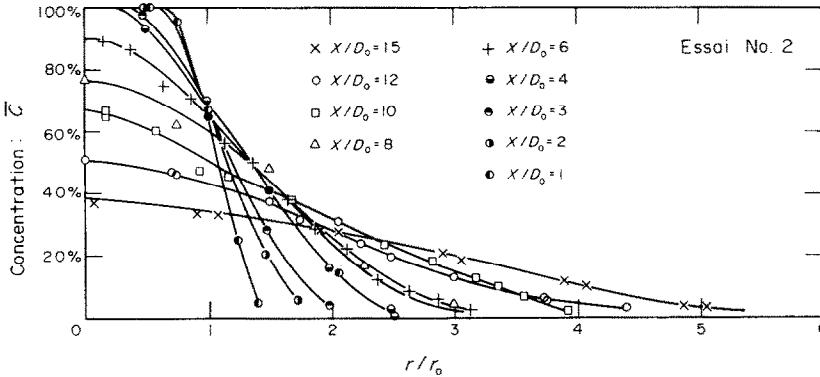


FIG. 5. Profils de concentration en CO₂.

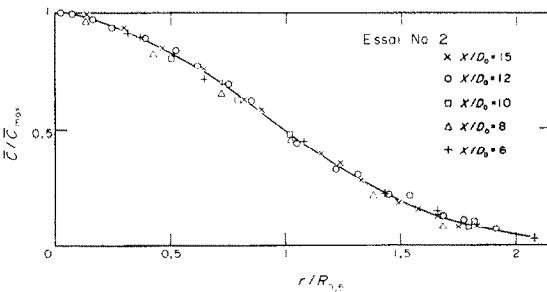


FIG. 6. Affinité des profils de concentration.

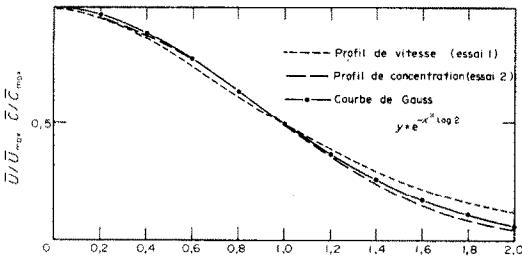


FIG. 7. Comparaison des profils de vitesse et concentration.

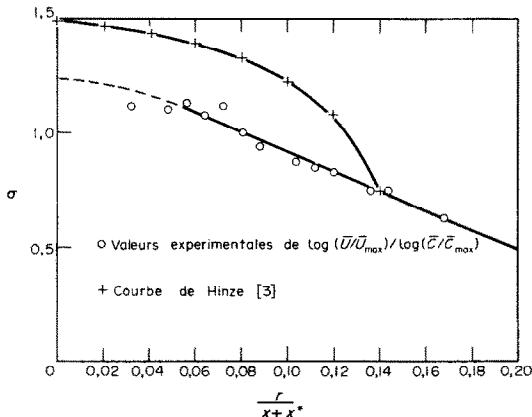


FIG. 8. Variation du nombre de Schmidt turbulent.

Enfin, une représentation des résultats par une loi de Gauss constitue une première approximation convenable du profil de concentration.

Par ailleurs, l'étude théorique ayant montré, sous certaines hypothèses, l'existence d'une relation simple en profil de vitesse et de concentration [équation (45)], nous avons cherché à savoir s'il pouvait en être ainsi hors de l'hypothèse du traceur. Pour cela, nous avons représenté, Fig. 8, la courbe donnant :

$$\sigma = \ln(\bar{U}/\bar{U}_{max})/\ln(\bar{C}/\bar{C}_{max}) \quad (47)$$

en fonction de $r/x + x^*$ qui, si l'équation (47) est vérifiée doit être une droite d'ordonnée constante. La lecture de la Fig. 8 montre alors qu'une telle hypothèse est à rejeter, confirmant ainsi un résultat déjà établi pour un jet satisfaisant à l'hypothèse de traceur [3].

4.5 Expansion du jet de CO₂

Un résultat important de la théorie générale développée au paragraphe 2.2 est que l'épaisseur caractéristique du profil de concentration comme du profil de vitesse varie linéairement avec x . Il se voit parfaitement confirmé par les constatations expérimentales, les évolutions des deux épaisseurs étant parallèles, seul un pôle d'abscisse $x^* = 3r_0$ apparaissant sur la configuration du champ des concentrations – Fig. 9.

4.6 Décroissance de la concentration maximale sur l'axe

L'étude théorique a fait apparaître une loi de décroissance en $[(x + x^*)/r_0]^{-n}$ — équation (30) — la Fig. 10 permet alors de situer les points expérimentaux par rapport à la courbe d'équation

$$y = \frac{35,96}{\left(\frac{x}{r_0} + 3\right)^{1,29}}$$

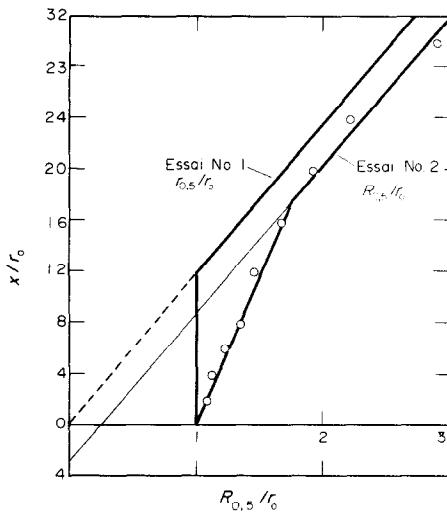


FIG. 9. Variation des épaisseurs caractéristiques.

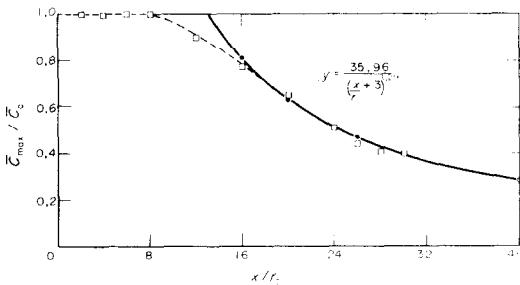


FIG. 10. Evolution longitudinale de la concentration sur l'axe.

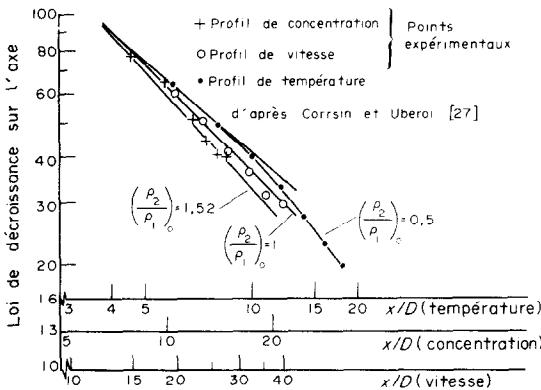


FIG. 11. Influence de la densité sur la loi de décroissance.

Les valeurs numériques ont été déterminées par une méthode de lissage de type moindre carrés, les écarts avec les points de mesure n'excédant pas 6 pour cent sur la plage $x/r_0 > 16$.

Ainsi, pour un jet dont le rapport de densité initial est supérieur à l'unité— $(\rho_2/\rho_1)_0 = 1,52$ —on note une décroissance moins rapide de la caractéristique maximum du profil que dans le cas d'équidensité. D'un point de vue qualitatif, cette constatation complète celle de Corrsin et Uberoi [28] qui, opérant sur des jets d'air chaud $(\rho_2/\rho_1)_0 < 1$ notèrent que la différence

de densité avait pour principal effet d'augmenter la décroissance des caractéristiques axiales, sans trop modifier la forme générale du profil—cf. paragraphe 4.4.—les courbes de la Fig. 11 ne font que préciser quantitativement ce résultat que la théorie précédente avait laissé entrevoir.

5. CONCLUSION

Les résultats expérimentaux fragmentaires que l'on trouve dans la littérature font état d'un certain nombre de modifications de la configuration de l'écoulement d'un jet turbulent lorsque le rapport des masses volumiques de l'effluent et de l'atmosphère est initialement différent de l'unité.

Prenant pour référence le cas d'équidensité, les modifications en question, qualifiées d'effets de densité, consistent essentiellement en une très légère altération du profil transversal de la propriété étudiée et en un changement beaucoup plus net de son évolution longitudinale.

L'explication de tels effets par les théories classiques n'est pas possible puisqu'à l'origine de celles-ci est admise une hypothèse de traceur excluant des valeurs initiales de $(\rho_2/\rho_1)_0$ trop éloignées de l'unité. Partant alors d'un ensemble d'hypothèses moins restrictif, une voie plus générale, reposant sur un système d'équations où la recherche du champ de vitesse ne peut s'envisager indépendamment de celle du champ de concentration, est proposée. En l'absence de la détermination des profils des différents paramètres, elle permet de dégager et de préciser les effets de densité qui sont :

- (1) Identité des lois de variation des épaisseurs caractéristiques des profils: $\delta \sim \xi$
- (2) Distinction des lois de décroissance en ξ^{-m} pour des paramètres différents (vitesse, concentration, température) la loi hyperbolique $m = 1$ restant celle du cas d'équidensité.

Les mesures originales sur le transfert de masse dans des jets de tube ont permis de vérifier ces propositions dans le cas où l'effluent est soit de l'air, soit du CO_2 pur et de confirmer expérimentalement l'absence de modification notable du profil de concentration assimilable, en première approximation à une courbe de Gauss.

Remerciements—Ces travaux ont été effectués à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse,* au sein de la division animée par Monsieur le Directeur de Recherche Sananes. Les auteurs tiennent à remercier Mm. Bories, Maître de Recherche au C.N.R.S. et Masbarnat, Maître de Conférence à l'INP et à mentionner, pour leur participation technique, Mlle P. Herault ainsi que Mm. J. Bonnefont et J. C. Pons.

BIBLIOGRAPHIQUES

1. T. Trupel, Über die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft, *Z. Ges. Turb.* 6(6) (1915).
2. S. I. Pai, *Viscous Flow Theory—II. Turbulent Flow*, D. Van Nostrand, New-York (1957).
3. J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York (1959).

*I.M.F.T.—Laboratoire associé au C.N.R.S. 2, rue Camichel—31071 Toulouse Cedex.

4. G. N. Abramovitch, *The Theory of Turbulent Jets*. M.I.T. Press, Cambridge (1963).
5. J. C. Laurence, Intensity, scale and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet, NACA TN 3561 (1955).
6. P. O. A. L. Davies, M. J. Fischer et M. J. Barratt, The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet, *J. Fluid Mech.* **15**(3), 337–367 (1963).
7. M. M. Gibson, Spectra of turbulence in a round jet, *J. Fluid Mech.* **15**, 161–173 (1963).
8. P. Bradshaw, D. H. Ferriss et R. F. Johnson, Turbulence in the noise-producing region of a circular jet, *J. Fluid Mech.* **19**, 591–624 (1964).
9. S. Sami, T. Carmody et H. Rouse, Jet diffusion in the region of flow establishment, *J. Fluid Mech.* **27**(2), 231–252 (1967).
10. J. Wagnanski et H. Fielder, Some measurements in the self preserving jet, *J. Fluid Mech.* **38**(3), 577–612 (1969).
11. C. A. Friehe, C. W. van Atta et C. H. Bibson, Jet turbulence: dissipation rate measurements and correlations, *AGARD Conf. Proc.* No. 93, pp. 181–187 (1971).
12. J. O. Hinze et B. G. van der Hegge Zijnen, *Appl. Scient. Res.* **A1**, 435–461 (1949).
13. W. R. Keagy et A. E. Weller, A study of freely expanding in homogeneous jets, *Heat Transfer and Fluid Mech.* Inst. Univ. of Calif. pp. 89–98. ASME, New York (1949).
14. S. I. Pai, On turbulent jet mixing of two gases at constant temperature, *J. Appl. Mech.* **22**(1), 41–47 (1955).
15. G. Abraham, Jet diffusion in stagnant ambient fluid. Delft Hydraulics Laboratory, Pub. No. 29, series Fluid Mechanics (1963).
16. R. B. Bird, W. E. E. Stewart et E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. John Wiley, New York (1960).
17. D. B. Spalding et W. Rodi, A two parameter model of turbulence and its application to free jets, *Wärme und Stoffübertragung* **3**(2), 85–95 (1970).
18. S. V. Patankar et D. B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 1787–1805 (1972).
19. W. Rodi, The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two equation model of turbulence, These Mech. Eng. Dept. Imp. Coll. Londres (1972).
20. C. Beguier, Etude du jet plan dissymétrique en régime turbulent incompressible, Thèse Univ. de Provence, I.M.S.T. (1971).
21. W. Tollmien, Berechnung turbulenter ausbreitungsvorgänge, *Z. Zngew. Math. Mech.* **6**, 468 (1926); et également NACA TM 1085 (1945).
22. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York (1955).
23. W. Zim, Über die Stromungsvorgänge in freien Luftstrahl, *Forsch. Geb. Ing. Wes.* 234 (1921).
24. Le Prandtl, Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2 (1923).
25. A. N. Syркин et D. N. Liakovski, Aerodynamics of an elementary flame, *Soobshch. Tseutr. Mauch Issl. Kottoturvinni Ingt.* (1936).
26. H. Reichardt, Sur une nouvelle théorie de la turbulence libre, T.T. 357 du GRA, Trad. *Z. Angew. Math. Mech.* **21**, 5 (1941).
27. P. Florent, Etude analytique et expérimentale des zones non établies des jets subsoniques turbulents à symétrie de révolution, Thèse, Univ. de Poitiers (1966).
28. S. Corrsin et M. S. Uberoi, Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent an jet, NACA Rept. 998 (1950).

MASS TRANSFER IN AXISYMMETRICAL TURBULENT JET OF NON HOMOGENEOUS COMPONENTS

Abstract—This paper deals with the diffusion of an incompressible turbulent round jet issuing in an atmosphere at rest composed of a different gas. The experiments described here, have been carried out with a neat carbon dioxide jet emitted in the air at the same temperature.

The salient features of the study concern mass transfer (velocity, concentration profiles, rate of spread, laws of decrease along the axis) and are compared with similar properties of an air jet.

To explain the discrepancy and similarity between the two flows, a theoretical approach is proposed without making use of the “tracer assumption”.

STOFFÜBERTRAGUNG IN ASYMMETRISCHEN TURBULENTEN STRAHLEN BEI NICHT HOMOGENEN KOMPONENTEN

Zusammenfassung—Diese Arbeit behandelt die Diffusion eines inkompressiblen turbulenten runden Strahles, der in eine ruhende Atmosphäre aus einem anderen Gas eintritt. Die hier beschriebenen Untersuchungen wurden für einen in Luft von gleicher Temperatur eintretenden Strahl von Kohlendioxid durchgeführt.

Die Untersuchungen befassen sich mit dem Stofftransport (Geschwindigkeit, Konzentrationsprofile, Ausbreitungsgeschwindigkeit, Abnahmegesetzmäßigkeiten längs der Achse) und werden mit ähnlichen Untersuchungen für Luftstrahlen verglichen.

Um die Unterschiede und die Ähnlichkeiten zwischen den zwei Strömungen zu erklären, wird eine theoretische Näherung vorgeschlagen, die nicht auf der “Spurenannahme” beruht.

ПЕРЕНОС МАССЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Аннотация — В статье рассматривается диффузия несжимаемой турбулентной круглой струи, истекающей в неподвижную среду из другого газа. Описанные в статье эксперименты проводились со струей из чистой двуокиси углерода, истекающей в воздух той же температуры.

В работе исследовались особенности переноса массы (профили скорости и концентрации, скорость распространения, закономерности осевого вырождения). Проведено сравнение с аналогичными данными для струи воздуха. Предлагается теоретический метод для объяснения различия и сходства между двумя потоками.